学校编码：10384　　　　分类号______密级____
学号：X2005170008　　　　UDC _____

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

解对称循环五对角线性方程组的一种方法

The Method for Solving Symmetric Circulant Pentadiagonal Systems of Linear Equations

洪 全 兴

指导教师姓名：卢 琳 璋 教授
专 业 名 称：计 算 数 学

论文提交日期：2009 年 5 月
论文答辩时间：2009 年 6 月
学位授予日期：2009 年　　月

答辩委员会主席：__________
评　　阅　　人：__________

2009 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外,该学位论文为(　　　　　　　　　　　　　　)课题(组)的研究成果，获得（　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

目 录

CONTENTS

摘 要

众所周知，在工程计算和实际应用中有许多问题最终都归结为矩阵计算问题，而且不同的应用会导出一些具有特殊稀疏结构的矩阵计算．在处理与这些稀疏结构矩阵有关的矩阵计算问题(例如计算特征值、求解线性方程组等)过程中，若矩阵的阶数较小时，通常的经典算法是可行的(例如 LU 分解算法、QR 算法等)．然而， 在许多实际应用当中， 稀疏矩阵的阶数很大，或某个线性方程组需要多次计算直到得到一个满意的结果(例如迭代法时)，此时这些经典的算法由于代价太大而失去了实际意义．因此， 针对这些稀疏结构矩阵的特点而设计一些能利用它们的结构的，数值稳定的快速算法, 具有非常重要的意义．

该方法利用了 LU 分解，并且算法的计算复杂度为 $O(n)$．该方法在计算量上和存储量上比高斯消元法更有优势．理论和数值实验显示, 这个快速算法是行之有效的．

第一节, 我们简单介绍了研究求解实对称五对角循环线性方程组的现实意义和文章结构, 同时也给出了与本论文有关的引理．.

第二节, 我们探讨含有三个参数的线性方程组的求解方法，并针对不同的情况进行讨论分析．

第三节, 我们利用第二节的结果和 Woodbury 公式，提出求解五对角对称 TOEPLITZ 线性方程组的一种方法．并给出一般五对角线性方程组含参追赶法算法．

第四节，利用引理的 Woodbury 公式，我们提出一种求解五对角对称循环线性方程组．

第五节，通过利用最优的 LU 分解，数值实验显示这是一种有效，稳定的算法．与其它算法相比较，我们的方法在解循环线性方程组上具有较大的优势。

关键词：实对称五对角; Woodbury 公式。

Abstract

It is well known that many problems in engineering computation and practical application are the problem of matrix calculus in nature.

As we all know, there are many issues in engineering computation and practical application that ultimately boil down to a matrix computation. And different applications will lead to some of the special sparse structure of the matrix computation.

In the process of dealing with the sparse matrix structure of the matrix computation (for example, eigenvalue calculation, solving linear equations, and so on), if the matrix is small, usually the classic method is feasible (for example, LU decomposition, QR algorithm, etc.). However, in many practical applications, the matrices are large and sparser, or a system of linear equations need to calculate several times until to get a satisfactory result (for example, when iteration), which will get the large loss of real significance because of the cost of the classic algorithms. As a result, to design the rapid and stable numerical algorithm by making use of some of their structure according to these sparse matrix structure features will be of great significance.

Some researchers proposed an effective way to solve real symmetric Pentadiagonal cycle of linear equations. the article introduces a new stable and effective way to solve real symmetric pentadiagonal circulant of linear equations. Our method apply the LU decomposition, and its computing complexity is $O(n)$. The method has more advantages in the cost of calculating and storage than Gauss elimination. Theory and numerical experiments show that our algorithm is effective.

In the first chapter, we briefly introduced the research significance to solve real symmetric pentadiagonal circulant of linear equations, structure of the article, as well as the lemma of the article.

In the second chapter, we explore with the three parameters of linear equations of the solution, and analyze the different situations.

In the third chapter, we use the results of the second chapter and the Woodbury formula to put forward the way of solving five TOEPLITZ angle symmetric linear equations.

In the forth Chapter, we proposed a way to solve the pentadiagonal circulant symmetry of linear equations by using the lemma Woodbury formula.

In the fifth Chapter, through using the optimal LU decomposition, numerical experiments show that this is an effective and stable algorithm. Compared with other methods, our method of solution in the circulation system of linear equations has a larger advantage.

Key words: real symmetric Pentadiagonal；Woodbury

第一节 绪 论

1.1 引 言

众所周知，在工程计算和实际应用中有许多问题最终都归结为矩阵计算的问题，而且许多的应用会导出一些具有特殊结构的稀疏线性方程组计算问题，比如样条逼近，有限元方法，插值法等等．这些线性方程组常常可以转化为对称循环五对角矩阵．通常我们将其分解为两个简单的循环矩阵，然后得用 Woodbury-公式求解．因直接法计算的解是非常精确有效的进而受到广大科技工作者的注目，因而利用直接法求解带有特殊带宽的线性方程组是非常有效的，比如基于 LU 分解算法，或者快速傅里叶变换来计算等．

本文介绍了一种新的有效稳定的方法来求解实对称五对角循环线性方程组．我们的方法利用了 LU 分解，并且算法的计算复杂度为$O(n)$．该方法在计算量上和存储量上比高斯消元法更有优势．理论和数值实验显示, 这个快速算法是行之有效的．

本文分为五节．第一节, 我们简单介绍了研究求解实对称五对角循环线性方程组的现实意义和文章结构, 同时也给出了与本论文有关的引理．．

第二节, 我们探讨含有三个参数的线性方程组的求解方法，并针对不同的情况进行讨论分析．

第三节, 我们利用第二章的结果和 Woodbury 公式，提出求解五对角对称 TOEPLITZ 线性方程组的一种方法．并给出一般五对角线性方程组含参追赶法算法．

第四节，利用引理的 Woodbury 公式，我们提出一种求解五对角对称循环线性方程组．

第五节，通过利用最优的 LU 分解，数值实验显示这是一种有效，稳定的算法．与其它方法相比，我们的方法在解循环线性方程组上具有较大的优势。该算法计算复杂度仅为$O(n)$．

1．2 问题的提出和主要引理

本节不加证明地引入一个引理和介绍一些相关的定义．其中引理中的公式是一个由秩$-m$矩阵修改过的矩阵的求逆的 Woodbury 公式．

引理 1 [13]（Woodbury 公式）设 A 是n阶可逆方阵，X，Y 均是$n\times m$矩阵，且$m\le n$，则当且仅当$I_m+\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{X}$可逆时，$\mathrm{A}+\mathrm{X}\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}$是可逆的，且

$$(\mathrm{A}+\mathrm{X}\mathrm{Y}^{\mathrm{T}})^{-1}=\mathrm{A}^{-1}-\mathrm{A}^{-1}\mathrm{X}(I_m+\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{X})^{-1}\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{-1}$$

定义 1 设矩阵$A=(a_{i,j})\in R^{n\times n}$，若对所有的$i(1\le i\le n)$都有

$$\left|a_{ii}\right|\ge\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\left|a_{ij}\right|,$$

并且式中至少对一个i有严格不等成立，则称A为弱严格对角占优的；如果对所有i都有严格不等号成立，则称A为严格对角占优的.

定义 2 n 阶 Toeplitz 矩阵定义如下：

$$T=\begin{bmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & \cdots & t_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1-n} & t_{2-n} & \cdots & t_0 \end{bmatrix},$$

即 $T=(t_{l,k}),t_{l,k}=t_{l-k},l,k=0,1,\ldots,n-1$．显然 Toeplitz 矩阵完全由它的第一行和第一列元素确定（共有 $2n-1$ 个元素）.

定义 3 n 阶对称 Toeplitz 矩阵定义如下：

$$T_S=\begin{bmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-1} \\ t_1 & t_0 & \cdots & t_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_0 \end{bmatrix},$$

即 $T_S=(t_{l,k}),t_{l,k}=t_{|l-k|},l,k=0,1,\ldots,n-1$．显然对称 Toeplitz 矩阵完全由它的第一行或第一列元素确定（共有 n 个元素）.

定义 4 （LU 分解）将系数矩阵 A 转变成等价两个矩阵 L 和 U 的乘积，其中 L 和 U 分别是下三角和上三角矩阵，而且要求 L 的对角元素都是 1.

解线性方程组的方法一般是，假定我们能把矩阵 A 写成下列两个矩阵相乘的形式

$$A=LU,$$

其中 L 为下三角矩阵，U 为上三角矩阵．这样我们可以把线性方程组 $Ax=b$ 写成

$$Ax=(LU)x=L(Ux)=b,$$

令 $Ux=y$，则原线性方程组 $Ax=b$ 可转化为

$$\mathrm{Ly}=\mathrm{b},\mathrm{Ux}=\mathrm{y},$$

于是可首先求解向量 y 使

$$\mathrm{Ly}=\mathrm{b},$$

然后求解

$$\mathrm{Ux}=\mathrm{y},$$

从而达到求解线性方程组 $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$ 的目的.

在工程计算和实际应用中有许多问题最终会导出一些具有特殊结构的稀疏线性方程组计算问题，我们考虑如下特殊的大型线性方程组

$$MX=d, \tag{1.1}$$

其中

$$M=\begin{pmatrix} a & b & c & & & & c & b \\ b & a & b & c & & & & c \\ c & b & a & b & c & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c & & & & & c & b & a & b \\ b & c & & & & & c & b & a \end{pmatrix}=M(a,b,c,0,\cdots,0,c,b)\,. \qquad (1.2)$$

称 M 为对称循环五对角矩阵，这里假定矩阵 M 是个 n（$n\geq 5$）阶严格对角占优矩阵，即满足有

$$|a|>2|b|+2|c|\,, \qquad (1.3)$$

其中$c\neq 0$．对 M 可通过矩阵变换为 $c=-1$，或者 $c=1$．我们主要讨论这种形式下的对称循环五对角线性方程组的解。其主要思路是对 M 进行分块，再进行实数范围内的 LU 分解，再利用 Woodbury 公式进行求解.

第二节　含三参数的对称五对角线性方程组

2.1　引　言

在解对称循环五对角线性方程组之前,我们先在这节里探讨含有三个参数的对称五对角线性方程组的求解方法.

$$Ny = f \text{，} \tag{2.1}$$

其中

$$N = N(a,b,c;\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} a & b & c & & & & & \\ b & a & b & c & & & & \\ c & b & a & b & \cdot & & 0 & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & c & b & a & b & c \\ & 0 & & & c & b & \gamma & \beta \\ & & & & & c & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

为 $n \times n$ 阶矩阵，即

$$n_{ij} = n_{ji} = \begin{cases} \alpha, & i = j = n \\ \beta, & i = n, n-1, j = n-1, n \\ \gamma, & i = j = n-1 \\ a, & i = j < n-1 \\ b, & i - j = 1, j < n \\ c, & i - j = 2, j > 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} .$$

对任意的 a.求解这个问题思路就是求解三个参数 α，β，γ，使得矩阵 N 有实的 LU 分解，即

$$N = LU \tag{2.2}$$

2.2　问题解决（一）

对于 c,我们分两种情况：

(1)　$c > 0$

这时，可通过矩阵变换，把 c 变成最简单的形式，即 $c = 1$.讨论这种形式下的 N 的 LU 分解.我们可导出矩阵 N 有如下的 LU 分解形式，其中可推出

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ \frac{\beta}{\alpha} & 1 & & & & & \\ \frac{1}{\alpha} & \cdot & \cdot & & 0 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \frac{1}{\alpha} & \frac{\beta}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} , \qquad U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & & & & \cdot & \cdot & 1 \\ & & & & & & \cdot & \beta \\ & & & & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

使得

$N = \alpha P_1 LUP_2$

其中

$$
P_1=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}_{n\times n},
P_2=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}_{n\times n}
$$

在这个类型中，我们可导出含有参数(α,β,γ)的非线性方程组

$$
\begin{aligned}
&\gamma+\frac{1}{\alpha}=a,\\
&\beta+\frac{\beta}{\alpha}=b,\\
&\alpha+\frac{\beta^2}{\alpha}=\gamma.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

消去参数β，γ得，设 m=$|b|$

$$
\alpha+\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha m^2}{(1+\alpha)^2}-a=0\ . \tag{2.4}
$$

令

$$
\alpha+\frac{1}{\alpha}=x\ ,
$$

则可把（2.4）式化成关于x的一个二元二次方程，则可解得

$$
x_1=\frac{(a-2)+\sqrt{(a+2)^2-4m^2}}{2}\quad ,x_2=\frac{(a-2)-\sqrt{(a+2)^2-4m^2}}{2}\ , \tag{2.5}
$$

对于每个x_i，我们有两个解α_{ij}，

$$
\begin{aligned}
\alpha_{ij}&=\frac{x_i\pm\sqrt{x_i^2-4}}{2}\\
\beta_{i,j}&=\frac{b\alpha_{i,j}}{1+\alpha_{i,j}}, \qquad .\\
\gamma_{i,j}&=\alpha_{i,j}+\frac{\beta_{i,j}^2}{\alpha_{i,j}},
\end{aligned}
$$

当$\alpha_{i,1},\alpha_{i,2}$是实数，我们假设$\alpha_{i,1}\geq\alpha_{i,2}$，

即$\alpha_{i,1}=\dfrac{x_i+\sqrt{x_i^2-4}}{2},\alpha_{i,2}=\dfrac{x_i-\sqrt{x_i^2-4}}{2},i=1,2$

若$x_i\geq 2$，固定i,则α_{ij}为对应于我们问题的一个解的分量．故α共有 4 个解．若

$a > 2m+2$ ，则有 $x_1 \ge 4$.

这是因为

$$x_1 = \frac{a-2+\sqrt{(a+2)^2-4m^2}}{2} > \frac{2\mathrm{m}+\sqrt{(2\mathrm{m}+4)^2-4m^2}}{2} = m+4\sqrt{m+1} > m+4 > 4. \qquad (2.6)$$

由（2.5）式，若 $a > 18$ ， $m \in \left[2\sqrt{a-2}, (a-2)/2\right]$，则我们可推得 $x_2 \ge 2$.（2.7）

因此 N 在这些范围内有实的 LU 分解.

定理 1：在（2.6）（2.7）条件下有

(i) $\alpha_{1,1} > 3, \alpha_{1,2} < \frac{1}{3}$， $\alpha_{2,1} > 1$， $\alpha_{2,2} < 1$

(ii) $\alpha_{1,2} = \min\limits_{1\le i,j\le 2} \alpha_{i,j}$

证：(i)因为

$$x_1 > 4, \text{所以} \alpha_{1,1} = \frac{x_1+\sqrt{x_1^2-4}}{2} > \frac{4+2}{2} = 3$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{x_1-\sqrt{x_1^2-4}}{2} = \frac{4}{2(x_1+\sqrt{x_1^2-4})} < \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 > 2, \text{所以} \alpha_{2,1} = \frac{x_2+\sqrt{x_2^2-4}}{2} > \frac{2}{2} = 1$$

$$\alpha_{2,2} = \frac{x_2-\sqrt{x_2^2-4}}{2} = \frac{4}{2(x_2+\sqrt{x_2^2-4})} < \frac{2}{2} = 1$$

(ii)

因为 $x_1 > x_2 > 2$, 所以有

$$-\sqrt{x_1^2-4} < -\sqrt{x_2^2-4} < 0 < \sqrt{x_2^2-4} < \sqrt{x_1^2-4}$$

故 $x_1 - \sqrt{x_1^2-4} < x_2 - \sqrt{x_2^2-4}$ 即 $\alpha_{1,2} < \alpha_{2,2}$

$x_2 + \sqrt{x_2^2-4} < x_1 + \sqrt{x_1^2-4}$ 即 $\alpha_{2,1} < \alpha_{1,1}$

再由(i)知， $\alpha_{2,1} > \alpha_{2,2}$, 故 $\alpha_{1,1} > \alpha_{2,1} > \alpha_{2,2} > \alpha_{1,2}$

即 $\alpha_{1,2} = \min\limits_{1\le i,j\le 2} \alpha_{i,j}$

2．3　问题解决（二）

其次我们考虑含有三个参数的线性方程组问题的第二种类型,. 即:

（2） $c < 0$

这时，可通过矩阵变换，把 c 变成最简单的形式，即 $c = -1$.讨论这种形式下的 N 的 LU 分解.

在这个类型中，我们可导出矩阵 N 有如下式的 LU 分解形式，其中可推出

$$L=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\beta}{\alpha} & 1 & & & & \\ -\frac{1}{\alpha} & \ddots & \ddots & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\frac{1}{\alpha} & \frac{\beta}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & & \ddots & -1 \\ & & & & \ddots & \beta \\ & & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

使得

$$N=\alpha P_1 L U P_2 .$$

上式等价于下列非线性方程组

$$\begin{aligned} &\gamma+\frac{1}{\alpha}=a, \\ &\beta-\frac{\beta}{\alpha}=b, \\ &\alpha+\frac{\beta^2}{\alpha}=\gamma. \end{aligned} \qquad (2.8)$$

我们在实数范围内求解．由（2.8）式消去 β,γ 解得

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}+\frac{m^2\alpha}{(\alpha-1)^2}-a=0 . \qquad (2.9)$$

令 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=x$，则（2.9）式变为 $x^2-x(2+a)+m^2+2a=0$

解得

$$x_i=\frac{(2+a)\pm\sqrt{(2+a)^2-4(m^2+2a)}}{2} . \qquad (2.10)$$

由（2.8）（2.9）可解得

$$\begin{aligned} &\alpha_i=\frac{x_i \pm\sqrt{x_i^2-4}}{2}, \\ &\beta_i=\frac{b\alpha_i}{\alpha_i-1}, \\ &\gamma_i=\alpha_i+\frac{\beta_i^2}{\alpha_i}, \end{aligned} \qquad (2.11)$$

综述，对含三参数的对称五对角矩阵是可以进行实数范围内的 LU 分解，从而达到求解含有三个参数对称五对角线性方程组的目的.

第三节　解五对角对称 TOEPLITZ 线性方程组

3.1 解五对角对称 TOEPLITZ 线性方程组

五对角对称 Toeplitz 矩阵的特征值问题在科学与工程计算、图像和信号处理领域中有着重要的应用，已引起不少学者的关注．然而对于具体计算五对角对称 Toeplitz 矩阵的算法研究，相应的数值算法涉及不多．

现在前面的基础上，介绍一种求解对称 Toeplitz 矩阵线性方程组的快速算法．利用第二节的结果来求解对称 TOEPLITZ 线性方程组

$$Pu = f \,, \tag{3.1}$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} a\ b\ c & & & \\ b\ a\ b\ c & & & 0 \\ c\ b\ a\ b\ c & & & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & c \\ 0 & & \cdot\ \cdot\ \cdot & b \\ & & c\ b & a \end{pmatrix} = P(a,b,c;a,b,a)$$

为 n 阶对称 Toeplitz 矩阵，取 $c=-1$，或 $c=1$．

$Ny=f$ 的解为（3.1）式求解提供了准备，其中 $N=N(a,b,c;\alpha,\beta,\gamma)$．

由第二节知，设矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} a-\alpha & b-\beta \\ b-\beta & a-\gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} \beta^2+1 & \pm\beta \\ \pm\beta & 1 \end{pmatrix},$$

利用分解

$$Q=SS^T,$$

其中

$$S=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\begin{pmatrix} \sqrt{\beta^2+1} & 0 \\ \pm\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{\beta^2+1}} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

因而可得 P,N 的关系如下，

$$P = N + UU^T \,, \tag{3.3}$$

这里 $U=\begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix}$，0 为 $(n-2)\times 2$ 零矩阵．

利用（3.3）式和引理 1 的 Woodbury 公式可得

$$\begin{aligned} P^{-1} &= N^{-1} - N^{-1}U(I+U^TN^{-1}U)^{-1}U^TN^{-1}, \\ u &= P^{-1}f = y - N^{-1}U(I+U^TN^{-1}U)^{-1}U^Ty, \end{aligned} \tag{3.4}$$

则 u 可由下列的式子进行连续计算得到：

$$\begin{aligned} & y=N^{-1}f, N^{-1}U, U^TN^{-1}U, U(I+U^TN^{-1}U)^{-1}, \\ & U^Ty, z=(I+U^TN^{-1}U)^{-1}(U^Ty), (N^{-1}U)z, u=P^{-1}f. \end{aligned}$$

故解五对角对称 TOEPLITZ 线性方程组就转为含三个参数的对称五对角线性方程组的求解方法.

3．2 五对角含参数追赶法算法

对于更一般的五对角矩阵，也可用直接 LU 分解的方法来求解.

设
$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_2 & d_3 & & & & \\ c_2 & a_2 & b_3 & d_4 & & & \\ p_3 & c_3 & a_3 & b_4 & d_5 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & p_{n-2} & c_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-1} & d_n \\ & & & p_{n-1} & c_{n-1} & a_{n-1} & b_n \\ & & & & p_n & c_n & a_n \end{pmatrix}.$$

为系数矩阵的线性方程组

$$Ax=f. \tag{3.5}$$

其中

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

现我们推导五对角含参数追赶法算法证明将五对角矩阵分解为

$$A=VLU. \tag{3.6}$$

其中

$$V=\begin{pmatrix} v_1 & & & \\ & v_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & v_n \end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix} s_1 & l_1 & 1 & & & \\ & s_2 & l_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & s_n & l_n & 1 \end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix} t_1 & & & \\ u_1 & t_2 & & \\ 1 & u_2 & \ddots & \\ & 1 & \ddots & t_n \\ & & \ddots & u_n \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

注意：在分解式 L 是 $n\times(n+2)$ 矩阵，U 是 $(n+2)\times n$ 矩阵.

比较式（3.6）两边元素，得

$$\begin{aligned} & d_i=v_{i-2}t_i,\ p_i=v_is_i\ (i=3,\cdots,n), \\ & a_i=v_i(s_it_i+l_iu_i+1)\ (i=1,2,\cdots,n), \\ & b_i=v_{i-1}(l_{i-1}t_i+u_i),\ c_i=v_i(s_iu_{i-1}+l_i)\ (i=2,3,\cdots,n). \end{aligned}$$

于是 V,L,U 的元素可以递推求得

$$\begin{cases} v_1=a_1(s_1t_1+l_1u_1+1)^{-1},\ u_2=v_1^{-1}b_2-l_1t_2, \\ v_2=(a_2-c_2u_2)(s_2t_2-s_2u_1u_2+1)^{-1},\ l_2=v_2^{-1}c_2-s_2u_1, \\ i=3,\cdots .n \\ t_i=v_{i-2}^{-1}d_i,\ u_i=v_{i-1}^{-1}b_i-l_{i-1}t_i,\ v_i=a_i-p_it_i-(c_i-p_iu_{i-1})u_i, \\ s_i=v_i^{-1}p_i,\ l_i=v_i^{-1}c_i-s_iu_{i-1}. \end{cases}$$